सारांश

- एक ऐसा समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर (चरों) के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज (अवकलजों) सम्मिलित हों, अवकल समीकरण कहलाता है।
- किसी अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम अवकलज की कोटि, उस अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।
- यदि कोई अवकल समीकरण अवकलजों में बहुपद समीकरण हैं तो उस अवकल समीकरण की घात परिभाषित होती है।
- किसी अवकल समीकरण की घात (यदि परिभाषित हो) उस अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम कोटि अवकलज की उच्चतम घात (केवल धनात्मक पूर्णांक) होती है।
- एक दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करने वाला फलन उस अवकल समीकरण का हल कहलाता है। एक ऐसा हल जिसमें उतने ही स्वेच्छ अचर हों, जितनी उस अवकल समीकरण की कोटि है, व्यापक हल कहलाता है और स्वेच्छ अचरों से मुक्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।
- किसी दिए हुए फलन से अवकल समीकरण बनाने के लिए हम उस फलन का उत्तरोत्तर उतनी ही बार अवकलन करते हैं जितने उस फलन में स्वेच्छ अचर होते हैं और तब स्वेच्छ अचरों को विलुप्त करते हैं।
- चर पृथक्करणीय विधि ऐसे समीकरण को हल करने के लिए उपयोग की जाती है जिसमें चरों को पूरी तरह से पृथक् किया जा सकता है अर्थात् y वाले पद dy के साथ रहने चाहिए और x वाले पद dx के साथ रहने चाहिए।
- एक ऐसा अवकल समीकरण, जिसको $\frac{dy}{dx} \quad f(x, y)$ अथवा $\frac{dx}{dy} \quad g(x, y)$ के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, जहाँ $f(x, y)$ एवं $g(x, y)$ शून्य घात वाले समघातीय फलन हैं, समघातीय अवकल समीकरण कहलाता है।
- $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y \quad \mathrm{Q}$, के रूप वाला अवकल समीकरण, जिसमें P तथा Q अचर अथवा केवल x के फलन हैं, प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

अवकल समीकरण विज्ञान की प्रमुख भाषाओं में से एक है। रोचक तथ्य यह है कि अवकल समीकरणों का अस्तित्व नवंबर 11, 1675 Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz (1646-1716) ने सर्वप्रथम सर्वसमिका, $\int y\, dy = \frac{1}{2} y^2$, को लिखित रूप में प्रस्तुत किया तथा

उनसे दोनों प्रतीकों $\int$ और dy से परिचित कराया। वस्तुतः Leibnitz ऐसी वक्र को ज्ञात करने की समस्या में मग्न थे जिसकी स्पर्श रेखा निर्दिष्ट हों, इस समस्या ने सन् 1691 में उन्हें 'चरों के पृथक्करणीय विधि' के अन्वेषण का मार्गदर्शन कराया। एक वर्ष पश्चात् उन्होंने 'प्रथम कोटि के समघातीय समीकरणों के हल करने की विधि' का सूत्रीकरण किया। वे आगे बढ़े और अल्प समय में उन्होंने 'प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधि' का अन्वेषण किया। कितना आश्चर्यजनक है कि उपर्युक्त सभी विधियों की खोज अकेले एक व्यक्ति द्वारा अवकल समीकरणों के जन्म के पच्चीस वर्षों के अल्पावधि के अंतर्गत संपन्न हुई।

प्रारंभ में केवल समीकरणों के 'हल' करने की प्रविधि को अवकल समीकरणों के 'समाकलन' के रूप में निर्दिश्ट किया गया था। यह शब्द सन् 1690 में प्रथमतः James Bernoulli, (1654 - 1705) द्वारा प्रचलन में लाया गया। शब्द 'हल' का सर्वप्रथम प्रयोग Joseph Louis Lagrange (1736-1813), द्वारा सन् 1774 में किया गया। यह घटना अवकल समीकरणों के जन्म से लगभग 100 वर्षों बाद घटित हुई। ये Jules Henri Poincare (1854 - 1912), थे, जिन्होंने शब्द 'हल' के प्रयोग के लिए अकाट्य तर्क प्रस्तुत किया, फलतः आधुनिक शब्दावली में शब्द हल को अपना उचित स्थान प्राप्त हुआ। 'चरों के पृथ्क्करणीय विधि का नामकरण John Bernoulli (1667-1748), James Bernoulli के अनुज द्वारा किया गया। मई 20, 1715 को Leibnitz को लिखे अपने पत्र में, उन्होने निम्नलिखित अवकल समीकरण के हल की खोज किए

$$x^2 y'' = 2y$$

के हल तीन प्रकार की वक्रों नामतः परवलय, अतिपरवलय और घनीय वक्रों के एक समूह का मार्गदर्शन कराते हैं। यह दर्शाता है कि ऐसे सरल दिखाई पड़ने वाले अवकल समीकरणों के हल कैसे नाना रूप धारण करते हैं। 20वीं शताब्दी के उतरार्ध में 'अवकल समीकरणों के गुणात्मक विश्लेषण' शीर्षक के अंतर्गत अवकल समीकरणों के हलों की जटिल प्रकृति के आविष्कार हेतु ध्यान आकर्षित किया गया। आजकल इसने लगभग सभी अविष्कारों हेतु अत्यंत प्रविधि के रूप में प्रमुख स्थान प्राप्त कर लिया है।

उत्कलन समीकरण
(differential calculas)

* अवकल समीकरण की कोटि (order)

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

order = 1

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

कोटि (order) = 2

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

कोटि = 3

* अवकल समीकरण की घात ⇒

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

कोटि = 1.

सबसे ज्यादा कोटि की घात देयते है।
order 3 की घात 1 है तो घात 1 होगी।

Que निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि एवं घात ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$

(ii) $xy\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

Solun (i) कोटि = 1, घात = 1

(ii) कोटि = 2, घात = 1

(iii) कोटि = 3, घात = की परिभाषित नहीं किया जा सकता है

* प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां

(1) पृथक्करणीय चर वाले अवकल समी०

example अवकल समी० $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{(2-y)}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए

Solun $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)}{(2-y)}$

$$(2-y)\,dy = (x+1)\,dx$$

दोनो ओर समाकलन लेने पर

$$\int (2-y)\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Ques अवकल समी० $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए

Solu $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

$$(1+x^2)\,dy = dx(1+y^2)$$

$$\frac{dy}{(1+y^2)} = \frac{dx}{(1+x^2)}$$

~~दोनो ओर समाकलन~~ लेने पर

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$$

PAGE No. DATE: / /201

* समघातीय अवकल समी०

Que अवकल समी० $(x^2+xy)\,dy = (x^2+y^2)\,dx$ को हल कीजिए

solu

$$(x^2+xy)\,dy = (x^2+y^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+xy)}$$

put $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+v^2x^2}{x^2+x \times vx} = \frac{x^2(1+v^2)}{x^2(1+v)}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v} - v = \frac{1+\cancel{v^2}-v-\cancel{v^2}}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$\frac{(1+v)}{(1-v)}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\left(-1+\frac{2}{1-v}\right)dv = \frac{dx}{x}$$

PAGE No
DATE : / /201

दोनो ओर समाकलन करने पर

$$\int\left(-1+\frac{2}{(1-v)}\right)dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$-v+\frac{2\log(1-v)}{(-1)} = \log x + c$$

$$-v - 2\log(1-v) = \log x + c$$

$\because y = vx \Rightarrow v = y/x$

$$\boxed{-\frac{y}{x} - 2\log(1-y/x) = \log x + c}$$ Ans

Que अवकल समी० $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ को हल कीजिए

Solu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

Put $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+vx}{x} = \frac{\cancel{x}(1+v)}{\cancel{x}}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = 1 + \cancel{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = 1$$

$$dv = \frac{dx}{x}$$

दोनो ओर समाकलन करने पर

$$\int dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$v = \log x + c$$

$$\because y = v.x \Rightarrow v = y/x$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = \log x + c}$$

**8 रैखिक अवकल समीकरण / Linear differential eq.

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

जहाँ P और Q, x के फलन है।

$$I.F = e^{\int P\,dx}$$

$$y.(I.F) = \int Q.I.F\,dx + C$$

PAGE No.
DATE : / /201

Ques अवकल समी० $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए

Sol. $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

$\therefore P = -1, \quad Q = \cos x$

$$I.F = e^{\int P\,dx} = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$$

$$y \cdot I.F = \int Q \cdot I.F + C$$

ILATE से

$$y \cdot e^{-x} = \int \overset{I}{\cos x} \cdot \overset{II}{e^{-x}} + C$$

let $I = \int \overset{I}{\cos x} \cdot \overset{II}{e^{-x}}$

$$I = \cos x \int e^{-x} dx - \int \frac{d}{dx} \cos x \cdot \int e^{-x} dx$$

$$= \cos x \frac{e^{-x}}{(-1)} - \int -\sin x \times \frac{e^{-x}}{(-1)}$$

$$I = -\cos x\, e^{-x} - \int \overset{II}{e^{-x}} \overset{I}{\sin x}$$

$$I = -\cos x\, e^{-x} - \left[\sin x \int e^{-x} dx - \int \frac{d}{dx} \sin x \int e^{-x} dx \right.$$

$$\therefore I = -\cos x\, e^{-x} - \left[\sin x \frac{e^{-x}}{(-1)} - \int \cos x \times \frac{e^{-x}}{(-1)} \right.$$

$$I = -\cos x\, e^{-x} + \sin x\, e^{-x} - \int \cos x\, e^{-x}$$

$$I = -\cos x\, e^{-x} + \sin x\, e^{-x} - I$$

$$2I = (\sin x - \cos x) e^{-x}$$

$$I = \frac{(\sin x - \cos x) e^{-x}}{2}$$

$$y \cdot e^{-x} = \frac{(\sin x - \cos x) e^{-x}}{2} + c$$

$$y = \frac{(\sin x - \cos x)}{2} + c \cdot e^{x}$$

Ques अवकल समी० $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ को हल कीजिए

Solu

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \quad \cancel{\text{}}$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x$ की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से

करने पर

$$P = 2/x, \quad Q = x$$

$$I.f = e^{\int P\,dx} = e^{\int 2/x\, dx}$$

$$= e^{2\log x} = e^{\log x^2}$$

$\therefore I.F = e^{\log x^2} = x^2$

$I.F = x^2$

$y \cdot I.F = \int Q.(I.F) + C$

$y x^2 = \int x . x^2 + C$

$y . x^2 = \int x^3 + C$

$y . x^2 = \frac{x^4}{4} + C$

$y = \frac{x^2}{4} + C x^{-2}$

* Bernoulli differential eqn

In mathematics, an ordinary differential eqn of the form $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ is called a Bernoulli differential eqn where n is any real number other than 0 and 1.

Ques अवकल समी० $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$ को हल कीजिए

Solⁿ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

y^2 से भाग करने पर

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \times \frac{1}{x} = x.$$

let $\frac{1}{y} = v.$

diff. w.r.t x

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = x$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = -x$$ की तुलना $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से करने पर

$$P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -x$$

PAGE No
DATE : / / 201

$$I.F = e^{\int P dx} = e^{\int -1/x \, dx}$$

$\because \log_e e = 1$

$$= e^{-\log x} = e^{\log x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$v(I.F) = \int Q (I.F) + C$$

$$y\left(\frac{1}{x}\right) = \int -\cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} + C$$

$$= \int -1 + C = -x + C$$

$$y\left(\frac{1}{x}\right) = -x + C$$

$$\boxed{y = -x^2 + Cx}$$ Ans

* Exact differential eqn

A differential eqn of type $Mdx + Ndy = 0$ will be exact diff. eq^n if and only if $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

solu^n of above differential eq^n will be given by

$$\underbrace{\int M dx}_{\text{keep } y \text{ const in } M} + \underbrace{\int N dy}_{\text{term free from } x} = C$$

Scanned with CamScanner

Ques solve the differential eq^n $2xy\,dx + (x^2+3y^2)dy = 0$

solu^n diff. eq^n $(2xy\,dx + (x^2+3y^2)\,dy = 0$ को तुलना $Mdx + Ndy = 0$ से करने पर

$$M = 2xy$$

$$N = (x^2+3y^2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \& \quad \frac{dN}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

above eq^n is exact differential eq^n.

solu^n.

$$\underset{\text{Keep constant y in M}}{\int M\,dx} + \underset{\text{leave term free from x}}{\int N\,dy} = 0$$

$$\underset{\text{Keep constant y in M}}{\int 2xy\,dx} + \underset{\text{Leave term free from x}}{\int (x^2+3y^2)\,dy} = 0$$

$$\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} \cdot y + \left(0 + \frac{\cancel{3}y^3}{\cancel{3}}\right) = C$$

$$x^2y + y^3 = C$$

Scanned with CamScanner