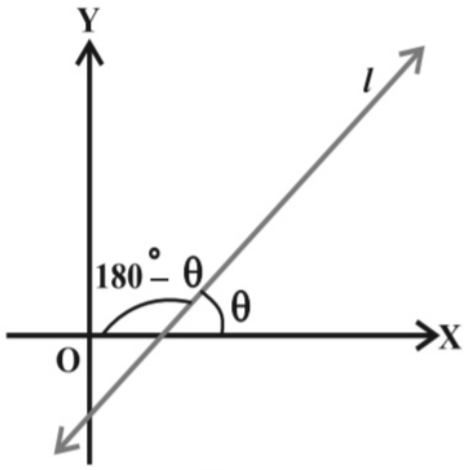
10.2 रेखा की ढाल (Slope of a line)

निर्देशांक तल में एक रेखा x-अक्ष, के साथ दो कोण बनाती है, जो परस्पर संपूरक होते हैं। कोण θ (मान लीजिए) जो रेखा l, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाती है, रेखा l, का **झुकाव** (Inclination of the line l) कहलाता है। स्पष्टतया $0° \leq \theta < 180°$ (आकृति 10.2)।



आकृति 10.2

हम देखते हैं कि x-अक्ष पर संपाती रेखाओं का झुकाव 0° होता है। एक ऊर्ध्व रेखा (y–अक्ष के समांतर या y–अक्ष पर संपाती) का झुकाव 90° है।

परिभाषा 1 यदि θ किसी रेखा l का झुकाव है, तो $\tan\theta$ को रेखा l की **ढाल** कहते हैं।

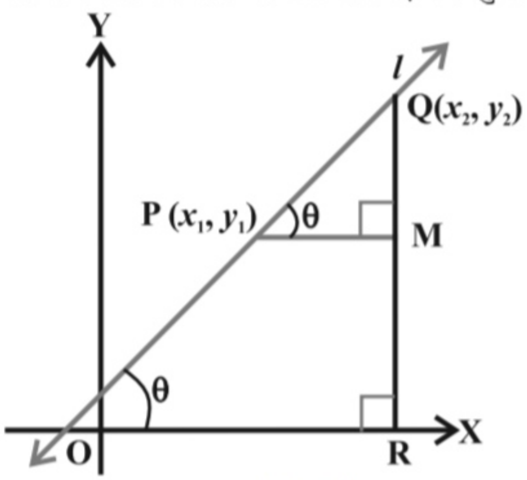
वह रेखा जिसका झुकाव 90° है, उसकी ढाल परिभाषित नहीं है। एक रेखा की ढाल को m से व्यक्त करते हैं। इस प्रकार $m = \tan\theta$, $\theta \neq 90°$ यह देखा जा सकता है कि x अक्ष की ढाल शून्य है और y अक्ष की ढाल परिभाषित नहीं है।

10.2.1 *रेखा की ढाल, जब उस पर दो बिंदु दिए गए हों (Slope of a line when coordinates of any two points on the line are given)*

हम जानते हैं, कि यदि एक रेखा पर दो बिंदु ज्ञात हों, तो वह पूर्णतया परिभाषित होती है। अत: हम रेखा की ढाल को उस पर दिए दो बिंदुओं के निर्देशांकों के पद में ज्ञात करते हैं।

मान लीजिए कि एक ऊर्ध्वेत्तर (non-vertical) रेखा l, जिसका झुकाव θ है, पर दो बिंदु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ हैं। स्पष्टतया $x_1 \neq x_2$, अन्यथा रेखा x-अक्ष पर लंब होगी, जिसकी ढाल परिभाषित नहीं है। रेखा l का झुकाव θ, न्यूनकोण या अधिक कोण हो सकता है। हम दोनों स्थितियों पर विचार करते हैं।

x–अक्ष पर QR तथा RQ पर PM लंब खींचिए (आकृति 10.3 (i) और (ii) में दर्शाया गया है।



आकृति 10. 3 (i)

दशा I जब θ न्यूनकोण है आकृति 10.3 (i), में $\angle MPQ = \theta$

इसलिए रेखा l की ढाल $= m = \tan\theta$ ... (1)

परंतु त्रिभुज ΔMPQ में, $\tan\theta = \frac{MQ}{MP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ... (2)

समीकरण (1) तथा (2) से, हम पाते हैं कि $m \quad \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1}$

दशा II जब θ अधिक कोण है :

आकृति 10.3 (ii) में, $\angle MPQ = 180° - \theta$.

इसलिए, $\theta = 180° - \angle MPQ$.

अब, रेखा l की ढाल $= m = \tan\theta$

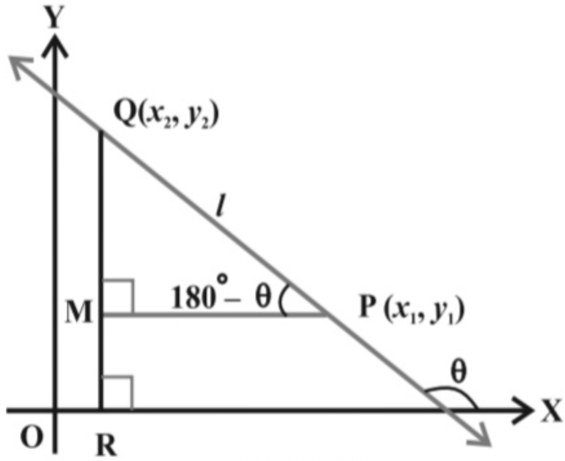
$= \tan(180° - \angle MPQ)$

$= -\tan \angle MPQ$

$= \frac{MQ}{MP} \quad \frac{y_2 \quad y_1}{x_1 \quad x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

फलतः दोनों दशाओं में बिंदु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से जाने वाली रेखा की ढाल

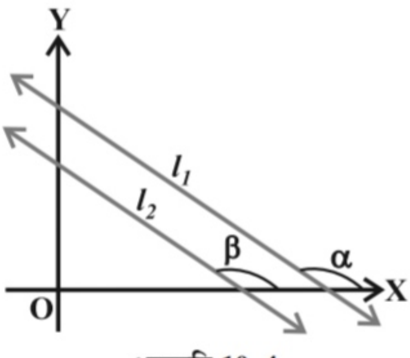
$$m \quad \frac{y_2 \quad y_1}{x_2 \quad x_1}$$



आकृति 10. 3 (ii)

10.2.2 दो रेखाओं के समांतर और परस्पर लंब होने का प्रतिबंध (*Conditions for parallelism and perpendicularity of lines*)

मान लीजिए कि ऊर्ध्वेतर रेखाओं l_1 और l_2 की ढालें, जो एक निर्देशांक तल में हैं क्रमशः m_1 तथा m_2, हैं। मान लीजिए कि इनके झुकाव क्रमशः α और β हैं। **यदि l_1 और l_2 समांतर रेखाएँहैं** (आकृति 10.4) तब उनके झुकाव समान होंगें।



आकृति 10. 4

अर्थात् $\alpha = \beta$, और $\tan\alpha = \tan\beta$

इसलिए $m_1 = m_2$, अर्थात् उनके ढाल बराबर हैं।

विलोमतः यदि दो रेखाओं l_1 और l_2 के ढाल बराबर हैं

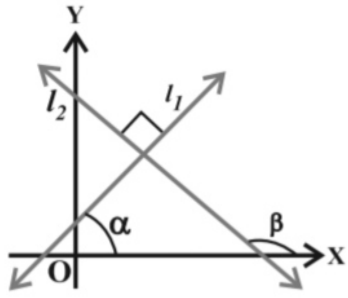
अर्थात् $m_1 = m_2$

तब $\tan\alpha = \tan\beta$

स्पर्शज्या (tangent) फलन के गुणधर्म से (0° और 180° के बीच), $\alpha = \beta$

अतः रेखाएँ समांतर हैं।

अत: दो ऊर्ध्वेत्तर रेखाएँ l_1 और l_2 समांतर होती हैं, यदि और केवल यदि उनके ढाल समान हैं।



आकृति 10. 5

यदि रेखाएँ l_1 और l_2 परस्पर लंब हैं (आकृति 10.5), तब $\beta = \alpha + 90°$.

इसलिए, $\tan\beta = \tan(\alpha + 90°)$

$$= -\cot\alpha = \frac{1}{\tan}$$

अर्थात् $m_2 = \frac{1}{m_1}$ या $m_1 \ m_2 = -1$

विलोमत: यदि $m_1 \ m_2 = -1$, अर्थात् $\tan\alpha \tan\beta = -1$.

तब, $\tan\alpha = -\cot\beta = \tan(\beta + 90°)$ या $\tan(\beta - 90°)$

इसलिए, α और β का अंतर $90°$ है।

अत:, रेखाएँ l_1 और l_2 परस्पर लंब हैं।

अत: दो ऊर्ध्वेत्तर रेखाएँ l_1 और l_2 परस्पर लंब होती हैं यदि और केवल यदि उनकी ढाल परस्पर ऋणात्मक व्युत्क्रम है।

अर्थात् $m_2 = \frac{1}{m_1}$ या $m_1 \, m_2 = -1$

आइए, निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें:

उदाहरण 1 उन रेखाओं के ढाल ज्ञात कीजिए जो

(a) $(3, -2)$ और $(-1, 4)$ बिंदुओं से होकर जाती है,

(b) $(3, -2)$ और $(7, -2)$ बिंदुओं से होकर जाती है,

(c) $(3, -2)$ और $(3, 4)$ बिंदुओं से होकर जाती है,

(d) धन x–अक्ष से $60°$ का कोण बनाती है।

हल (a) $(3, -2)$ और $(-1, 4)$ बिंदुओं से जाने वाली रेखा की ढाल

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \text{ है}$$

(b) $(3, -2)$ और $(7, -2)$ बिंदुओं से जाने वाली रेखा का ढाल

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0 \text{ है}$$

(c) (3, – 2) और (3, 4) बिंदुओं से जाने वाली रेखा का ढाल

$$m = \frac{4-(-2)}{3-3} = \frac{6}{0}$$, जो कि परिभाषित नहीं है।

(d) यहाँ रेखा का झुकाव $\alpha = 60°$ । इसलिए, रेखा का ढाल

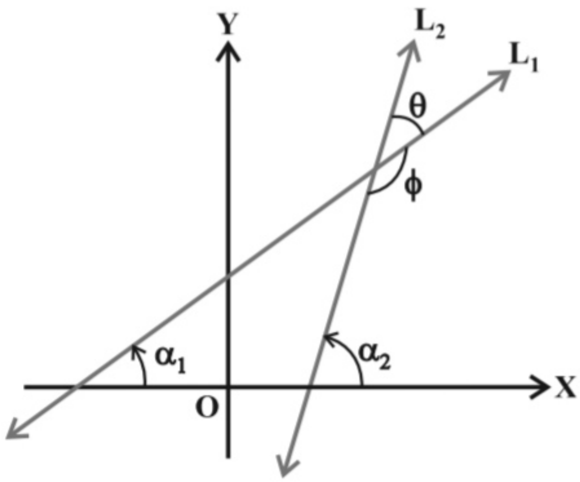
$$m = \tan 60° = \sqrt{3}$$ है।

10.2.3 दो रेखाओं के बीच का कोण (Angle between two lines) जब हम एक तल में स्थित एक से अधिक रेखाओं के बारे में विचार करते हैं तब देखते हैं कि या तो ये रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं या समांतर होती हैं। यहाँ हम दो रेखाओं के बीच के कोण पर, उनके ढालों के पदों में विचार करेंगे।

मान लीजिए दो ऊर्ध्वेत्तर रेखाओं L_1 और L_2 के ढाल क्रमशः m_1 और m_2 है। यदि L_1 और L_2 के झुकाव क्रमशः α_1 और α_2 हों तो

$$m_1 \quad \tan\alpha_1 \text{ और } m_2 \quad \tan\alpha_2$$

हम जानते हैं कि जब दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तब वे दो शीर्षाभिमुख कोणों के युग्म बनाती हैं जो ऐसे हैं कि किन्हीं दो संलग्न कोणों का योग 180° है। मान लीजिए कि रेखाओं L_1 और L_2 के बीच संलग्न कोण θ और ϕ हैं (आकृति 10.6)। तब



आकृति 10. 6

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \text{ और } \alpha_1, \alpha_2 \neq 90°$$

इसलिए, $\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2} = -\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ (क्योंकि $1 + m_1m_2 \neq 0$)

और $\phi = 180° - \theta$

इस प्रकार $\tan\phi = \tan(180° - \theta) = -\tan\theta = \dfrac{m_2 \quad m_1}{1 \quad m_1m_2}$, क्योंकि $1 + m_1m_2 \neq 0$

अब, दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं:

स्थिति I यदि $\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ धनात्मक है, तब $\tan\theta$ धनात्मक होगा और $\tan\phi$ ऋणात्मक होगा जिसका

अर्थ है θ न्यूनकोण होगा और ϕ अधिक कोण होगा।

स्थिति II यदि $\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ऋणात्मक है, तब $\tan\theta$ ऋणात्मक होगा और $\tan\phi$ धनात्मक होगा जिसका अर्थ है θ अधिक कोण होगा और ϕ न्यून कोण होगा।

इस प्रकार, m_1 और m_2, ढाल वाली रेखाओं L_1 और L_2 के बीच का न्यून कोण (माना कि θ) इस प्रकार है,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, \text{ जहाँ } \quad 1 + m_1 m_2 \neq 0 \qquad \ldots (1)$$

अधिक कोण (माना कि ϕ) $\phi = 180^0 - \theta$ के प्रयोग से प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 2 यदि दो रेखाओं के बीच का कोण $\dfrac{\pi}{4}$ है और एक रेखा की ढाल $\dfrac{1}{2}$ है तो दूसरी रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि m_1 और m_2 ढाल वाली दो रेखाओं के बीच न्यूनकोण θ इस प्रकार है कि

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad \ldots (1)$$

यहाँ $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = m$ और $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

अब (1) में इन मानों को रखने पर

$$\tan\frac{\pi}{4} \quad \left|\frac{m \quad \frac{1}{2}}{1 \quad \frac{1}{2}m}\right| \quad \text{या} \quad 1 \quad \left|\frac{m \quad \frac{1}{2}}{1 \quad \frac{1}{2}m}\right|,$$

जिससे प्राप्त होता है $\quad \dfrac{m \quad \frac{1}{2}}{1 \quad \frac{1}{2} \quad m} \quad 1$ या $\quad \dfrac{m \quad \frac{1}{2}}{1 \quad \frac{1}{2} \quad m} \quad -1$

इसलिए, $m \quad 3$ या $m \quad \dfrac{1}{3}$

PAGE No 1
DATE : / /201

(Straight lines)

(i) एक बिन्दु (x_1, y_1) से जाने वाली रेखा का समी०

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

जहाँ m = रेखा की प्रवणता

(ii) दो बिन्दुओं (x_1, y_1) व (x_2, y_2) से जाने वाली रेखा का समी०

$$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

* रेखा का ढाल (slope) जब उस पर दो बिन्दु दिये गये हो।

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

* दो रेखाओं के समान्तर व परस्पर लम्बवत होने का प्रतिबन्ध

समान्तर होने के लिये

$$m_1 = m_2$$

लम्बवत होने के लिये

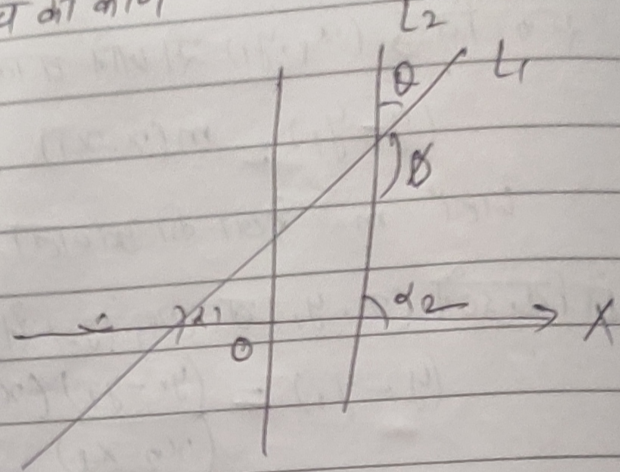
$$m_1 m_2 = -1$$

Ques उस रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए। जो बिन्दु $(3, -2)$ और $(-1, 4)$ बिन्दुओं से होकर जाती है।

Soln
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-2)}{-1 - 3} = \frac{6}{-4} = -3/2$$

$$\boxed{m = -\frac{3}{2}}$$

* दो रेखाओं के बीच का कोण



$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right]$$

या $$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

Ques यदि दो रेखाओं के बीच का कोण $\pi/4$ है और एक रेखा की ढाल $1/2$ है तो दूसरी रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए।

Solu:

$m_1 = 1/2, \quad m_2 = m, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

सूत्र $$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{1/2 - m}{1 + \frac{m}{2}}\right|$$

$$1 = \left|\frac{\frac{1}{2}-m}{1+m/2}\right|$$

$$\pm 1 = \frac{1/2-m}{1+m/2}$$

(+) लेने पर

$$1 = \frac{1/2-m}{1+m/2} \Rightarrow 1+m/2 = 1/2-m$$

$$\frac{3m}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{m = -1/3}$$

(-) चिन्ह लेने पर

$$-1 = \frac{1/2-m}{1+m/2}$$

$$-1-m/2 = 1/2-m$$

$$-m/2+m = 1/2+1$$

$$\frac{1}{2}m = 3/2$$

$$\boxed{m = 3}$$

$$\boxed{m = 3, \; -1/3}$$

Ques बिन्दु $(-2,3)$ से जाने वाली ढाल -4 की रेखा का समी[illegible]
ज्ञात करो।

Soln बिन्दु $(x_1, y_1) = (-2, 3)$

ढाल $m = -4$

सूत्र

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

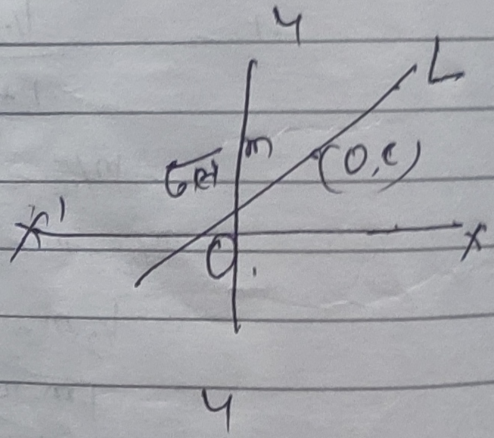
$(y - 3) = -4(x + 2)$

$y - 3 = -4x - 8$

$\boxed{4x + y + 5 = 0}$

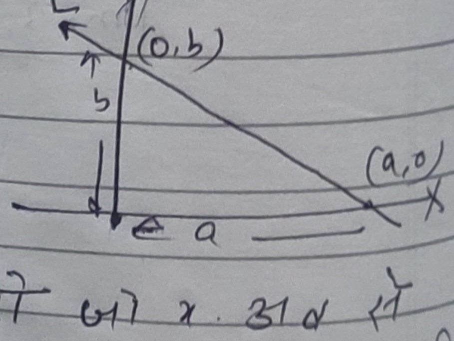
(*) ढाल अन्तः खण्ड रूप

$y = mx + c$



* अंतःखण्ड रूप ⇒

सूत्र $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



~~Ques एक रेखा का समीकरण ज्ञात करो~~ जो x अक्ष से
-3 और y अक्ष से क्रमशः 2 का अंतःखण्ड काटती है

Soln

$a = -3, \; b = 2$

सूत्र $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से

$$\boxed{\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1}$$

या $\boxed{2x - 3y + 6 = 0}$

* लंब रूप (Normal form)

$$\boxed{x \cos\alpha + y \sin\alpha = p}$$

अतः मूल बिंदु से लांबिकदूरी p और धन x-अक्ष तथा लंब के बीच कोण α वाली रेखा का समी

Ques रेखा का समी. ज्ञात कीजिए जिसकी मूलबिंदु से लांबिक दूरी 4 इकाई है और x अक्ष तथा लम्ब के बीच का कोण 15° है,

Solu $\alpha = 15°, \quad p = 4$

सूत्र $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

$x\cos 15° + y\sin 15° = 4$

$\cos 15 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\sin 15 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

समी $\boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} y = 4}$

* Perpendicular distance from a point to a line
The distance from a point (m, n) to the line $Ax + By + C = 0$ is given by

$$d = \frac{|Am + Bn + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ques Find the distance from the point $(-3, 7)$ to the line $y = \frac{6}{5}x + 2$

Soln line $y = \frac{6}{5}x + 2$

$5y = 6x + 10$

$6x - 5y + 10 = 0$

perpendicular distance from the point $(-3, 7)$

$$d = \frac{|-3 \times 6 - 5 \times 7 + 10|}{\sqrt{6^2 + (-5)^2}}$$

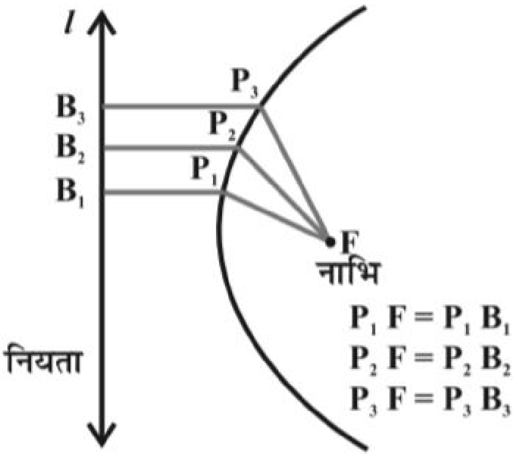
$$= \left| \frac{-18 - 35 + 10}{\sqrt{36 + 25}} \right|$$

$$d = \frac{43}{\sqrt{61}}$$

11.4 परवलय (Parabola)

परिभाषा 2 एक परवलय तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जो एक निश्चित सरल रेखा और तल के एक निश्चित बिंदु (जो रेखा पर स्थित नहीं है) से समान दूरी पर है।

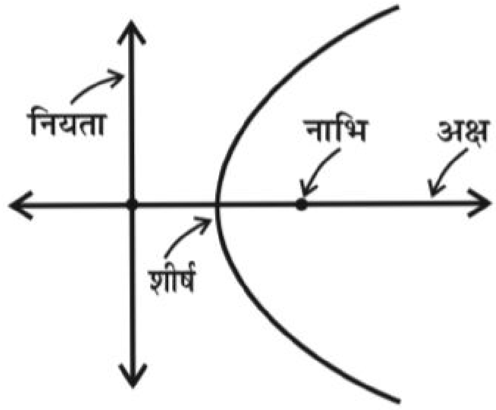
निश्चित सरल रेखा को परवलय की **नियता** (*directrix*) और निश्चित बिंदु F को परवलय की **नाभि** (focus) कहते हैं (आकृति 11.13)। (अंग्रेजी भाषा में 'Para' का अर्थ 'से' व 'bola' का अर्थ 'फेंकना', अर्थात् हवा में गेंद फेंकने से बना हुआ पथ)



आकृति 11.13

> **टिप्पणी** यदि निश्चित बिंदु, निश्चित सरल रेखा पर स्थित हो तो तल के उन बिंदुओं का समुच्चय जो निश्चित बिंदु और निश्चित रेखा से समान दूरी पर हैं, निश्चित बिंदु से गुज़रने वाली निश्चित रेखा पर लंबवत सरल रेखा होती है। हम इस सरल रेखा को परवलय की **अपभ्रष्ट स्थिति** कहते हैं।

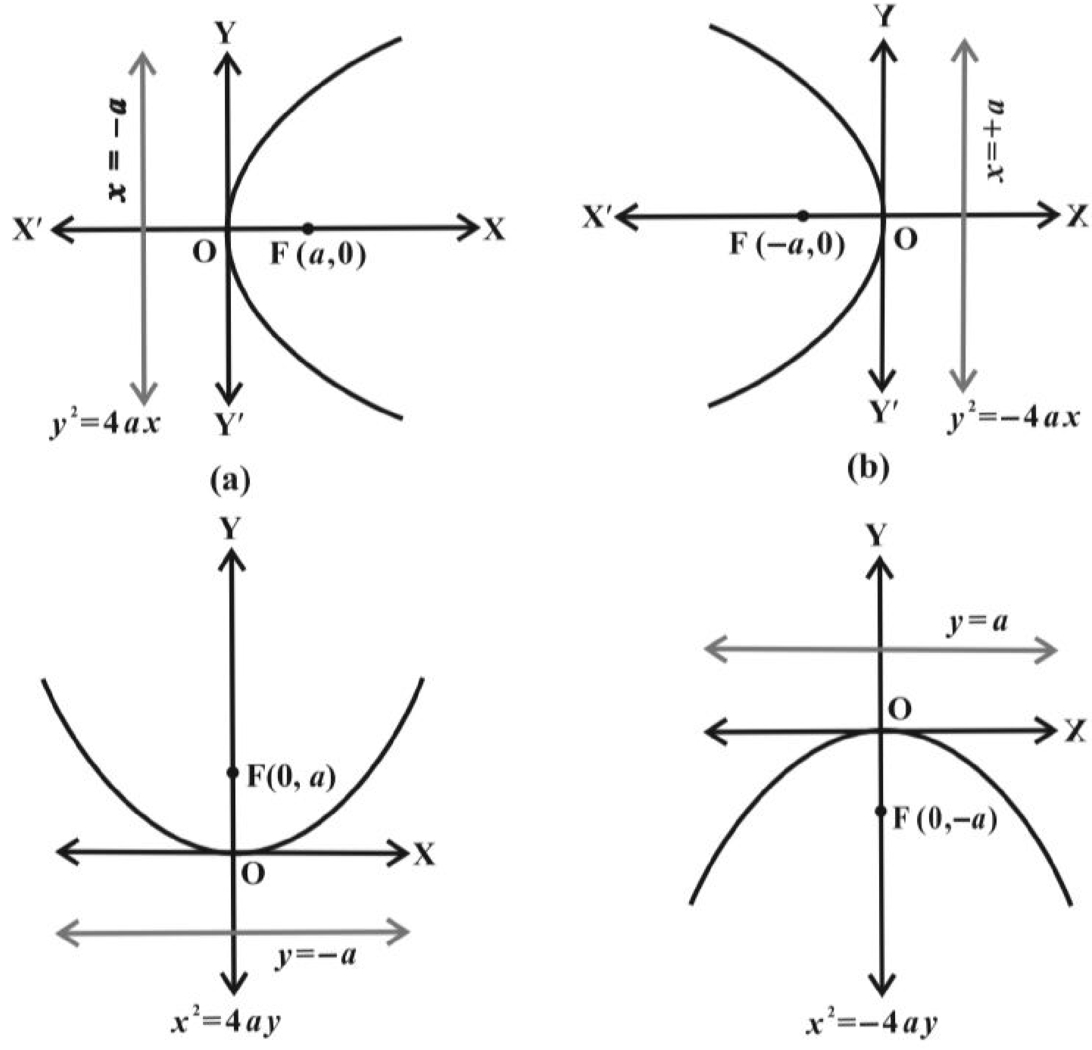
परवलय की नाभि से जाने वाली तथा नियता पर लंब रेखा को परवलय का **अक्ष** कहा जाता है। परवलय का अक्ष जिस बिंदु पर परवलय को काटता है उसे परवलय का **शीर्ष**(vertex) कहते हैं (आकृति 11.14)।



आकृति 11.14

11.4.1 *परवलय का प्रमाणिक समीकरण (Standard equation of parabola)*

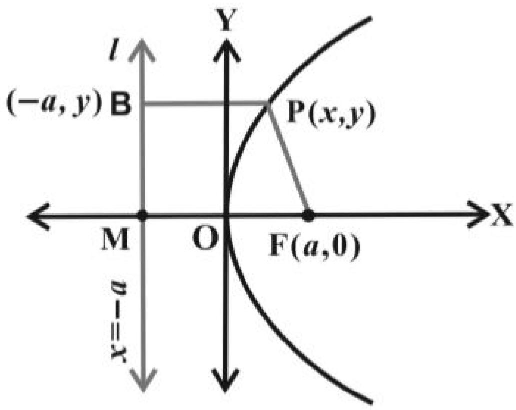
परवलय का समीकरण सरलतम होता है यदि इसका शीर्ष मूल बिंदु पर हो और इसकी सममित अक्ष, x-अक्ष या y-अक्ष के अनुदिश होता है। परवलय के ऐसे चार संभव दिक्‌विन्यास नीचे आकृति 11.15(a) से (d) तक में दर्शाए गए हैं।



आकृति 11.15 (a) से (d)

अब हम आकृति 11.15 (a) में दर्शाए गए परवलय का समीकरण जिसकी नाभि $(a, 0)$ $a > 0$ और नियता $x = -a$ को निम्नवत प्राप्त करेंगे।

मान लीजिए कि नाभि F और नियता l है। नियता पर लंब FM खींचिए और FM को बिंदु O पर समद्विभाजित कीजिए। MO को X तक बढ़ाइए। परवलय की परिभाषा के अनुसार मध्य बिंदु O परवलय पर है और परवलय का शीर्ष कहलाता है। O को मूल बिंदु मानकर OX को x-अक्ष और इसके लंबवत OY को y-अक्ष लीजिए। मान लीजिए कि नाभि की नियता से दूरी $2a$ है। तब नाभि के निर्देशांक $(a, 0)$, $a > 0$ है तथा नियता का समीकरण $x + a = 0$ जैसा कि आकृति 11.16 में है।



आकृति11.16

मान लीजिए परवलय पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि

$$PF = PB \quad \dots (1)$$

जहाँ PB रेखा l पर लंब है। B के निर्देशांक $(-a, y)$ हैं। दूरी सूत्र से हम पाते हैं

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \text{ और } PB = \sqrt{(x+a)^2}$$

क्योंकि PF = PB, हम पाते हैं,

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2}$$

इसलिए $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

या $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$ या $y^2 = 4ax, (a > 0)$.

इस प्रकार परवलय पर कोई बिंदु समीकरण

$$y^2 = 4ax \text{ को संतुष्ट करता है।} \quad \dots (2)$$

विलोमत: माना (2) पर $P(x, y)$ एक बिंदु है।

अब
$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + 4ax}$$
$$= \sqrt{(x+a)^2} = PB \quad \dots (3)$$

इसलिए $P(x,y)$, परवलय पर स्थित है।

इस प्रकार (2) और (3) से हमने सिद्ध किया कि एक परवलय जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर नाभि $(a,0)$ तथा नियता $x = -a$ का समीकरण $y^2 = 4ax$ होता है।

विवेचना समीकरण (2) में, यदि $a > 0, x$ का मान धनात्मक या शून्य हो सकता है परंतु ऋणात्मक नहीं। इस स्थिति में परवलय को प्रथम और चतुर्थ चतुर्थांश में अनिश्चित रूप से दूर तक बढ़ाया जा सकता है और परवलय का अक्ष, x-अक्ष का धनात्मक भाग है।

इसी प्रकार हम परवलयों का समीकरण प्राप्त कर सकते हैं।

आकृति 11.15 (b) में $y^2 = -4ax$,

आकृति 11.15 (c) में $x^2 = 4ay$,

आकृति 11.15 (d) में $x^2 = -4ay$,

इन चार समीकरणों को परवलय के **मानक समीकरण** कहते हैं।

टिप्पणी परवलय के मानक समीकरण में, परवलय की नाभि किसी एक निर्देशांक अक्ष पर स्थित होती है, शीर्ष मूल बिंदु पर होता है और नियता, दूसरे अक्ष के समांतर होती है। यहाँ ऐसे परवलयों का अध्ययन, जिनकी नाभि कोई भी बिंदु हो सकती है और नियता कोई भी रेखा हो सकती है, इस पुस्तक के विषय से बाहर है।

आकृति 11.15, से प्राप्त परवलय के प्रमाणिक समीकरण के निरीक्षण से निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

1. परवलय, परवलय अक्ष के सापेक्ष सममित होता है। यदि परवलय के समीकरण में y^2 का पद है तो सममित, x-अक्ष के अनुदिश है और यदि समीकरण में x^2 का पद है तो सममित अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है।
2. यदि सममित अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश हो और
   (a) x का गुणांक धनात्मक हो तो परवलय दाईं ओर खुलता है।
   (b) x का गुणांक ऋणात्मक हो तो परवलय बाईं ओर खुलता है।
3. यदि सममित अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश हो और
   (a) y का गुणांक धनात्मक हो तो परवलय ऊपर की ओर खुलता है।
   (b) y का गुणांक ऋणात्मक हो तो परवलय नीचे की ओर खुलता है।

11.4.2 *नाभिलंब जीवा (Latus rectum)*

परिभाषा 3 परवलय की नाभि से जाने वाली और परवलय की अक्ष के लंबवत रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु परवलय पर हों, को परवलय की नाभिलंब जीवा कहते हैं (आकृति 11.17)

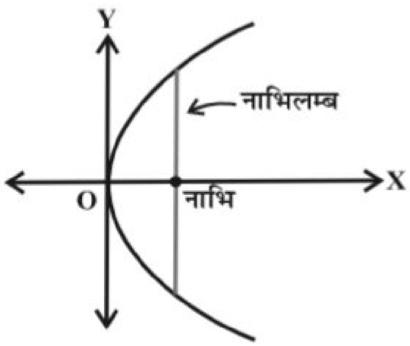
परवलय $y^2 = 4ax$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात करना (आकृति 11.18)

परवलय की परिभाषा के अनुसार, AF = AC

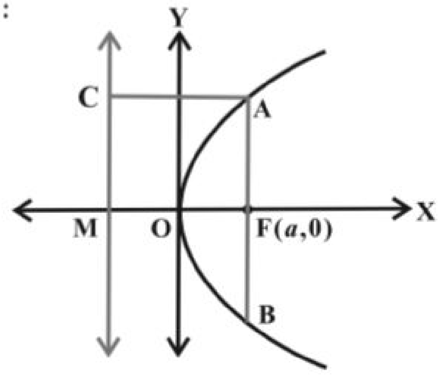
परंतु AC = FM = $2a$

अतः AF = $2a$

और क्योंकि परवलय, x-अक्ष के परितः सममित है। अतः



आकृति 11.17



आकृति 11.18

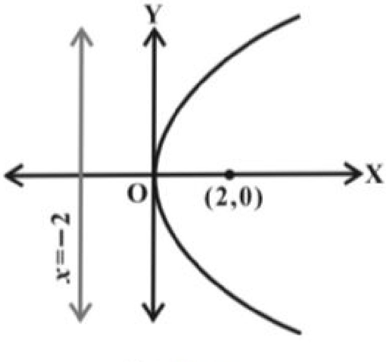
AF = FB और इसलिए

AB = नाभिलंब जीवा की लंबाई = $4a$

उदाहरण 5 यदि एक परवलय का समीकरण $y^2 = 8x$ है तो नाभि के निर्देशांक, अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल दिए समीकरण में y^2 का पद है इसलिए परवलय x-अक्ष के परितः सममित है।

क्योंकि समीकरण में पद x का गुणांक धनात्मक है इसलिए परवलय दाहिनी ओर खुलता है। दिए गए समीकरण $y^2 = 4ax$, से तुलना करने पर, $a = 2$
अतः परवलय की नाभि $(2, 0)$ है और परवलय की नियता का समीकरण $x = -2$ है (आकृति 11.19)।
नाभिलंब जीवा की लंबाई $4a = 4 \times 2 = 8$



आकृति 11.19

उदाहरण 6 नाभि $(2,0)$ और नियता $x = -2$ वाले परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि नाभि $(2,0)$ x-अक्ष पर है इसलिए x-अक्ष स्वयं परवलय का अक्ष है।

अतः परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ या $y^2 = -4ax$ के रूप में होना चाहिए क्योंकि नियता $x = -2$ है और नाभि $(2,0)$ है, इसलिए परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ के रूप में है जहाँ $a = 2$.
अतः परवलय का अभीष्ट समीकरण $y^2 = 4(2)\,x = 8x$ है।

उदाहरण 7 एक परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0,0)$ और नाभि $(0, 2)$ है।

हल क्योंकि शीर्ष $(0,0)$ पर और नाभि $(0,2)$ पर है, जो y-अक्ष पर स्थित है, अतः परवलय का अक्ष, y-अक्ष है। इसलिए परवलय का समीकरण, $x^2 = 4ay$ के रूप में है। अतः परवलय का समीकरण है $x^2 = 4(2)y$, अर्थात् $x^2 = 8y$

उदहारण 8 उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष के परितः सममित हो और बिंदु $(2,-3)$ से गुज़रता है।

हल क्योंकि परवलय y-अक्ष के परितः सममित है और इसका शीर्ष मूल बिंदु पर है, अतः इसका समीकरण $x^2 = 4ay$ या $x^2 = -4ay$, के रूप में है जहाँ चिह्न परवलय के ऊपर या नीचे खुलने पर निर्भर करता है परंतु परवलय चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित बिंदु $(2, -3)$ से गुज़रता है इसलिए यह अवश्य ही नीचे की ओर खुलेगा। अतः परवलय का समीकरण $x^2 = -4ay$ के अनुरूप है, क्योंकि परवलय $(2,-3)$, से गुज़रता है, अतः हमें प्राप्त होता है,

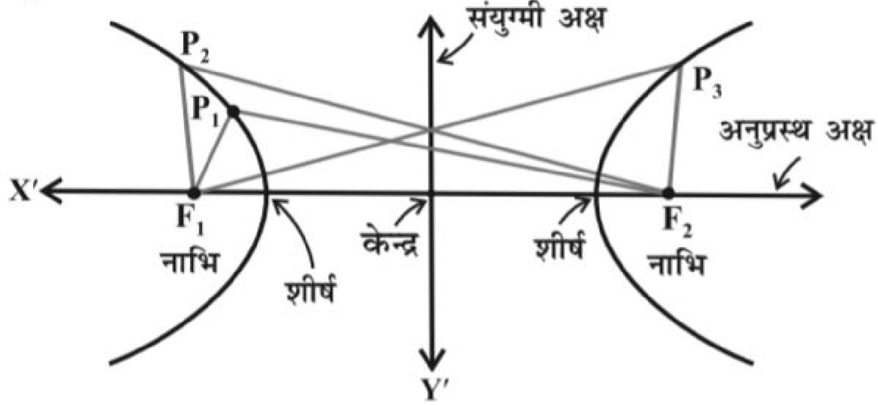
$$2^2 = -4a\,(-3), \text{ अर्थात् } a = \frac{1}{3}$$

अतः परवलय का समीकरण है

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right) y, \text{ अर्थात् } 3x^2 = -4y$$

11.6 अतिपरवलय (Hyperbola)

परिभाषा 7 एक अतिपरवलय, तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरी का अंतर अचर होता है।

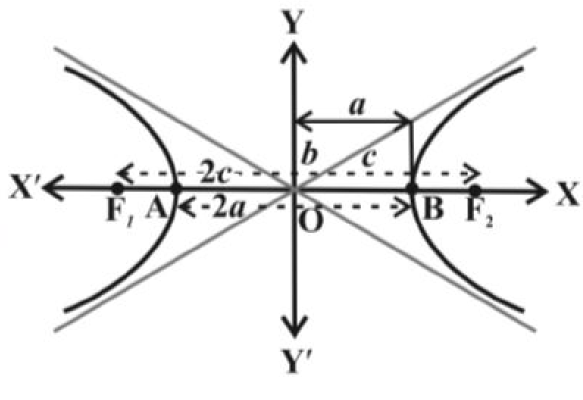


$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

आकृति 11.29

परिभाषा में 'अंतर' शब्द का प्रयोग किया गया है जिसका अर्थ है दूर स्थित बिंदु से दूरी ऋण निकट स्थित बिंदु से दूरी। दो स्थिर बिंदुओं को दीर्घवृत्त की **नाभियाँ** कहते हैं। नाभियों को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु को **अतिपरवलय का केंद्र** कहते हैं। नाभियों से गुज़रने वाली रेखा को **अनुप्रस्थ अक्ष** (transverse axis) तथा केंद्र से गुज़रने वाली रेखा और अनुप्रस्थ अक्ष पर लंबवत् रेखा को संयुग्मी अक्ष (conjugate axis) कहते हैं। अतिपरवलय, अनुप्रस्थ अक्ष को जिन बिंदुओं पर काटता है, उन्हें अतिपरवलय के शीर्ष (vertices) कहते हैं (आकृति 11.29)।

दोनों नाभियों के बीच की दूरी को हम $2c$ से प्रदर्शित करते हैं, दोनों शीर्षों के बीच की दूरी (अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई) को $2a$ से प्रदर्शित करते हैं और हम राशि b को इस प्रकार परिभाषित करते हैं कि $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $2b$ को **संयुग्मी अक्ष की लंबाई** भी कहते है (आकृति11.30)।



आकृति 11.30

समीकरण (1) की अचर राशि $P_1F_2 - P_1F_1$ ज्ञात करना

आकृति 11.30 में A तथा B पर बिंदु P को रखने पर हमें प्राप्त होता है,

$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1$ (अतिपरवलय की परिभाषा के अनुसार)

$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1$

अर्थात् $AF_1 = BF_2$

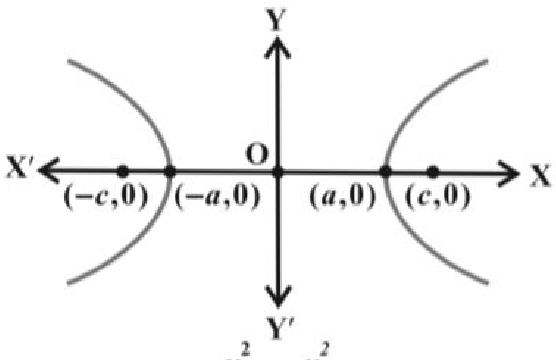
इसलिए, $BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a$

11.6.1 उत्केंद्रता *(Eccentricity)*

परिभाषा 8 दीर्घवृत्त की तरह ही अनुपात $e = \frac{c}{a}$ को अतिपरवलय की उत्केंद्रता कहते हैं। चूँकि $c \geq a$, इसलिए उत्केंद्रता कभी भी एक से कम नहीं होती है। उत्केंद्रता के संबंध में, नाभियाँ केंद्र से ae की दूरी पर होती है।

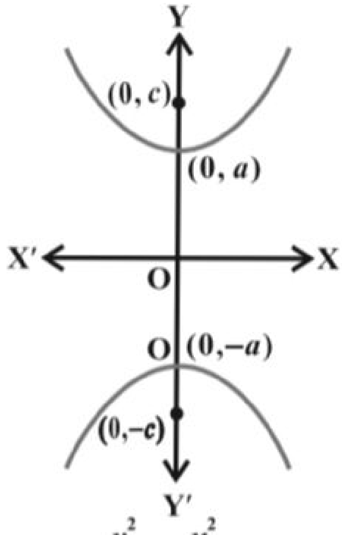
11.6.2 *अतिपरवलय का मानक समीकरण (Standard equation of Hyperbola)* यदि अतिपरवलय का केंद्र मूल बिंदु पर और नाभियाँ x-अक्ष और y-अक्ष पर स्थित हों तो अतिपरवलय का समीकरण सरलतम होता है ऐसे दो संभव दिक्विन्यास आकृति 11.31 में दर्शाए गए हैं।

अब हम आकृति 11.31(a) में दर्शाए गए अतिपरिवलय, जिसकी नाभियाँ x-अक्ष पर स्थित हैं का समीकरण व्युत्पन्न करेंगे।



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a)

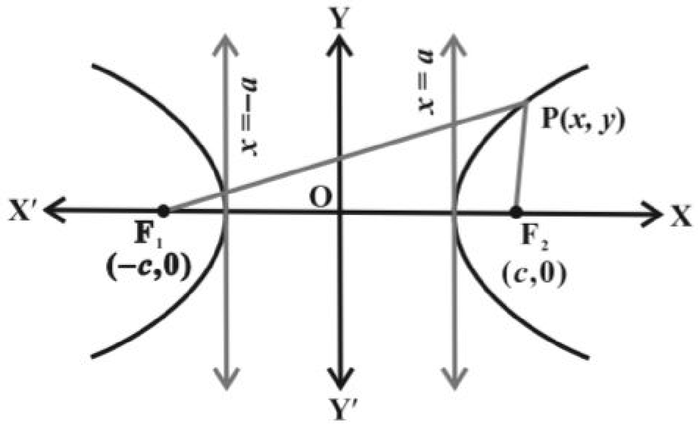


$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

(b)

आकृति 11.31

मान लीजिए F_1 और F_2 नाभियाँ हैं और रेखाखंड F_1F_2 का मध्य बिंदु O है। मान लीजिए O मूल बिंदु है और O से F_2 की ओर धनात्मक x-अक्ष व O से F_1 की ओर ऋणात्मक x-अक्ष है। माना O से x-अक्ष पर लंब y-अक्ष है। F_1 के निर्देशांक $(-c,0)$ और F_2 के निर्देशांक $(c,0)$ मान लेते हैं (आकृति 11.32)।



आकृति 11.32

मान लीजिए अतिपरवलय पर कोई बिंदु $P(x, y)$ इस प्रकार है कि P की दूरस्थ बिंदु से व निकटस्थ बिंदु से दूरीयों का अंतर $2a$ है इसलिए, $PF_1 - PF_2 = 2a$

दूरी सूत्र से हम पाते हैं

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

या
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

जिसे सरल करने पर मिलता है,

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

पुनः वर्ग करने व सरल करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

या
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{क्योंकि } c^2 - a^2 = b^2)$$

अतः अप्रतिपरवलय पर स्थित कोई बिंदु

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

को संतुष्ट करता है।

विलोमतः माना P(x, y), समीकरण (3) को संतुष्ट करता है, $0 < a < c$. तब,

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$$

इस प्रकार $$PF_1 = + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$= + \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)} = a + \frac{c}{a}x$$

इसी प्रकार $$PF_2 = a - \frac{a}{c}x$$

अतिपरवलय में $c > a$ और चूँकि P रेखा $x = a$, के दाहिनी ओर है, $x > a$, और इसलिए $\frac{c}{a}x > a$.

या $a - \frac{c}{a}x$ ऋणात्मक हो जाता है। अतः $PF_2 = \frac{c}{a}x - a$.

इसलिए $PF_1 - PF_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$

ध्यान दीजिए, यदि P रेखा $x = -a$, के बाईं ओर होता तब $PF_1 = -\left(a + \frac{c}{a}x\right)$, $PF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

उस स्थिति में $PF_2 - PF_1 = 2a$. इसलिए कोई बिंदु जो $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, को संतुष्ट करता है तो अतिपरवलय पर स्थित होता है।

इस प्रकार हमने सिद्ध किया कि एक अतिपरवलय, जिसका केंद्र (0,0) व अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है, का समीकरण है $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

टिप्पणी एक अतिपरवलय जिसमें $a = b$ हो, **समकोणीय अतिपरवलय** (rectangular hyperbola) कहलाता है।

विवेचना अतिपरवलय के समीकरण से हम यह निष्कर्ष पाते हैं कि अतिपरवलय पर प्रत्येक बिंदु (x, y) के लिए, $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$.

अर्थात् $\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$, अर्थात् $x \leq -a$ या $x \geq a$. इसलिए, वक्र का भाग रेखाओं $x = +a$ और $x = -a$, के बीच में स्थित नहीं है (अथवा संयुग्मी अक्ष पर वास्तविक अंत:खंड नहीं होते हैं)।

इसी प्रकार, आकृति 11.31 (b) में, हम अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ व्युत्पन्न कर सकते हैं।

इन दो समीकरणों को **अतिपरवलय का मानक समीकरण** कहते हैं।

> टिप्पणी अतिपरवलय के मानक समीकरण में, अतिपरवलय का केंद्र, मूल बिंदु पर और अनुप्रस्थ अक्ष व संयुग्मी अक्ष निर्देशांक्षो पर स्थित हैं। तथापि यहाँ ऐसे भी अतिपरवलय होते हैं जिनमें कोई दो लंबवत् रेखाएँ अनुप्रस्थ अक्ष व संयुग्मी अक्ष होते हैं परंतु ऐसी स्थितियों का अध्ययन उच्च कक्षाओं में हैं।

आकृति 11.29, से प्राप्त अतिपरवलयों के मानक समीकरण के निरीक्षण से हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

1. अतिपरवलय, दोनों निर्देशांक्षों के सापेक्ष सममित हैं क्योंकि यदि अतिपरवलय पर एक बिंदु (x, y) है तो बिंदु $(-x, y)$, $(x, -y)$ और $(-x, -y)$ भी अतिपरवलय पर स्थित हैं।
2. अतिपरवलय की नाभियाँ सदैव अनुप्रस्थ अक्ष पर स्थित होती हैं। यह सदैव एक धनात्मक पद है जिसका हर अनुप्रस्थ अक्ष देता है। उदाहरणत: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ का अनुप्रस्थ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और इसकी लंबाई 6 है जबकि $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ का अनुप्रस्थ अक्ष, y-अक्ष के अनुदिश है और इसकी लंबाई 10 है।

11.6.3 *नाभिलंब जीवा (Latus rectum)*

परिभाषा 9 अतिपरवलय की नाभियों से जाने वाली और अनुप्रस्थ अक्ष पर लंबवत् रेखाखंड जिसके अंत्य बिंदु अतिपरवलय पर हों, को अतिपरवलय की **नाभिलंब जीवा** कहते हैं।

दीर्घवृत्तों की भाँति, यह दर्शाना सरल है कि अतिपरवलय की नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a}$ है।

उदाहरण 14 निम्नलिखित अतिपरवलयों के शीर्षों और नाभियों के निर्देशांकों, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

Hyperbola: When the ratio (defined in parabola and ellipse) is greater than 1, i.e., $e > 1$, then the conic is said to be hyperbola.

Since the equation of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ differs form that of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in having $-b^2$ instead of b^2, most of the results proved for the ellipse are true for the hyperbola, if we replace b^2 by $-b^2$ in their proofs.

Equation	Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Conjugate Hyperbola $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Equation of Transverse axis	$y = 0$	$x = 0$
Length of Transverse axis	$2a$	$2b$
Equation of Conjugate axis	$x = 0$	$y = 0$
Length of Conjugate axis	$2b$	$2a$
Vertices	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$
Foci	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$
Directrix	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{b}{e}$
Centre	$(0, 0)$	$(0, 0)$
Eccentricity	$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2}}$
Length of a Latus–rectum	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
Focal distances of any point (x, y)	$ex \pm a$	$ey \pm b$

PAGE No
DATE : / /201

परवलय (Parabola)

Ques परवलय $y^2 = 12x$ के नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समी० और नाभिलम्ब जीवा की लं० ज्ञात कीजिए

Solu परवलय $y^2 = 12x$ की तुलना परवलय $y^2 = 4ax$ से करने पर

$$12x = 4ax$$

$$4a = 12$$

$$\boxed{a = 3}$$

नाभि के निर्देशांक $= (a, 0) = (3, 0)$

परवलय का अक्ष $y = 0$

नियता का समी $x + a = 0$, $\boxed{x + 3 = 0}$

नाभिलम्ब की लं० $= 4a = 4 \times 3 = 12$

Ques Find the vertex (शीर्ष), focus (नाभि), directrix (नियता) axis (अक्ष) and latusrectum (नाभिलम्ब) of the parabola $y^2 - 4x - 4y = 0$

Solu

$$y^2 - 4x - 4y = 0$$

$$y^2 - 4y = 4x$$

$$y^2 - 4y + 4 = 4x + 4$$

$$(y - 2)^2 = 4(x + 1)$$

परवलय $(y - 2)^2 = 4(x + 1)$

Let $Y = (y - 2)$, $X = (x + 1)$

PAGE No
DATE : / / 201

$y^2 = 4x$ की तुलना $y^2 = 4ax$ से करने पर

$\cancel{4}a = \cancel{4} \Rightarrow a = 1$

शीर्ष के निर्देशांक $= (0, 0)$

$X = 0, \quad Y = 0.$

$x + 1 = 0, \quad y - 2 = 0$

$\boxed{x = -1, \ y = 2}$ अतः शीर्ष $= (-1, 2)$

नाभि के निर्देशांक $= (a, 0)$

$X = a, \quad Y = 0,$

$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0.$

$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

अतः नाभि $= (0, 2)$

अक्ष का समी० $Y = 0.$

$y - 2 = 0, \Rightarrow \boxed{y = 2}$

नाभिलम्ब की लं० $= 4a$

$= 4 \times 1 = 4$

नियता का समी० $\Rightarrow X = -a$

$x + 1 = -1$

$\boxed{x + 2 = 0}$

Scanned with CamScanner

अतिपरवलय (Hyperbola)

अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $e > 1$

अतिपरवलय का समी०

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 > b^2)$$

Qus अतिपरवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ के ~~अक्ष~~ शीर्ष, नाभि के निर्देशांक, उत्केन्द्रता और नाभिलम्ब जीवा की ल० ज्ञात करो?

Sol. अति परवलय $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ की तुलना $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ से करने पर

$a^2 > b^2$

$$a^2 = 16,\ b^2 = 9 \Rightarrow a = 4,\ b = 3$$

शीर्ष $= (\pm a, 0)$, $(\pm 4, 0)$

नाभि के निर्देशांक $= (\pm ae, 0)$

$e = ?$

सूत्र. $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$9 = 16(e^2 - 1)$

$\frac{9}{16} = e^2 - 1$

$\frac{9}{16} + 1 = e^2 \Rightarrow \frac{25}{16} = e^2 \Rightarrow \boxed{e = \frac{5}{4}}$

नाभि के निर्देशांक $= (\pm ae, 0)$

$= (\pm 4 \times 5/4,\ 0)$

$(\pm 5, 0) \quad = (\pm 5, 0)$

नाभिलम्ब जीवा की लं० = $\frac{2b^2}{a}$

$= \frac{2\times 9}{\cancel{4}\,2} = \frac{9}{2} = 4.5$

Ques अतिपरवलय का समी० ज्ञात करो जिसका अनुप्रस्थ अक्ष 8 है और ~~नाभियों के बीच~~ नाभीय दूरी 10 है।

Solu अनुप्रस्थ अक्ष = 8

$2a = 8 \Rightarrow a = 4$

नाभीय दूरी = 10

$2ae = 10$

$2\times 4\times e = 10 \Rightarrow e = \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}\times 4}$

$e = 5/4$

स्वतः

$b^2 = a^2(e^2 - 1)$ से

$= 16\left(\frac{25}{16} - 1\right) = \cancel{16}\times\frac{9}{\cancel{16}}$

$b^2 = 9$

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Scanned with CamScanner